GROUPE B

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Le problème concerne l'ensemble S des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$0 = x^4(2y + z) - y^4 z + y^4 + 3xy^3$$

1° Quelle est la nature de l'intersection de S d'avec le plan d'équation $y = \lambda x$? (resp. $x = 0$).

2° Déterminer explicitement cinq droites incluses dans S.

3° Étudier l'intersection de S d'avec le plan d'équation $z = 1$ (voir notamment les questions de concavité). Tracer une figure.

4° Déterminer les triplets $(x, y, 1) \in S \cap \mathbb{Z}^3$.

5° Étudier l'intersection de S d'avec le plan d'équation $z = 0$ en posant $y = \lambda x$; on utilisera systématiquement les constantes $\alpha = \sqrt[5]{2}$, $\beta = \sqrt[5]{3}$ et on donnera des valeurs numériques arrondies à 0,001 près des coordonnées des points correspondant à des extremums de x et y. Y a-t-il un cercle de courbure à l'origine? Tracer une figure.

6° Déterminer une valeur approchée du réel y non nul défini par $(1, y, 0) \in S$ en explicitant sa partie entière n, en appliquant la méthode des parties proportionnelles entre n et $n + 1$, puis la méthode des tangentes (dite de Newton).

7° Pour tout réel z, déterminer la nature de l'ensemble $E(z)$ des réels y tels qu'existe au moins un réel x tel que $(x, y, z) \in S$.